

晨晖家教中学数学竞赛

CMC2003 年 12 月赛题 (总第 1 期)

(2003 年 12 月 10 日前绝密)

注意：本期赛题共三道大题。答题时间：2003. 12. 10-2003. 12. 31。试题提交截止日期为 2003. 12. 31。

本月第一位全部答对者获晨晖家教提供的奖金 50 元。

CMC 官方网站：<http://www.chenhui.org>

1. 是否存在二次函数 $f(x)$, 满足条件：

1) $f(-1)=0$

2) 对一切 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $x \cdot f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)$

若存在, 写出满足条件的 $f(x)$ 的通式, 并说明理由。若不存在, 给予证明。

<晨晖家教试题科 供题>

2. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且满足

$$\begin{cases} x = \sqrt{y+45} - \sqrt{y+5} \\ y = \sqrt{x+45} - \sqrt{x+5} \end{cases}$$

求证： $x+y=8$

<晨晖家教试题科 供题>

3. 已知： $a, b, c > 0$ 且 $abc=1$, 求证：

$$\frac{1}{a^4(b+c)} + \frac{1}{b^4(a+c)} + \frac{1}{c^4(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

<晨晖家教试题科 供题>

晨晖家教中学数学竞赛

CMC2004 年 1 月赛题 (总第 2 期)

(2004 年 1 月 10 日前绝密)

注意：本期赛题共三道大题。答题时间：2004.1.10-2004.1.31。试题提交截止日期为 2004.1.31。本月第一位全部答对者获晨晖家教提供的奖金 50 元。

CMC 官方网站：<http://www.chenhui.org>

1. 已知定义在 Z^+ 上的函数 f 满足： $f(1) = \sqrt{2}$ ，且 $f(x) = \sqrt{f(x-1)+2}$ ($x \geq 2$)。

(1) 试求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ；

(3) 试确定函数 f 的最简解析式并证明之。

<晨晖家教试题科 供题>

2. 在实数范围内解方程：

$$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(3x + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos^2(4x) = 1$$

<晨晖家教试题科 供题>

3. ABC 的三条边长分别为 a, b, c , 周长为 L , 求证, 对一切自然数 n 成立：

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} L^{n-1}$$

<晨晖家教试题科 供题>

晨晖家教中学数学竞赛

CMC2004 年 2 月赛题 (总第 3 期)

2004 年全国高中数学联合竞赛热身赛

(2004 年 2 月 10 日前绝密)

注意：本期赛题共三道大题。答题时间：2004. 2. 10-2004. 2. 29。试题提交截止日期为 2004. 2. 29。下期赛题出题时间为 2004. 3. 10。参赛对象为成都市所有数学爱好者。本月第一位全部答对者获晨晖家教提供的奖金 50 元。

CMC 官方网站：<http://www.chenhui.org>

1. 已知：
$$\operatorname{tg} 7\theta = \frac{7\operatorname{tg}\theta - 35\operatorname{tg}^3\theta + 21\operatorname{tg}^5\theta - \operatorname{tg}^7\theta}{1 - 21\operatorname{tg}^2\theta + 35\operatorname{tg}^4\theta - 7\operatorname{tg}^6\theta}$$

求值：
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2}{7}\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{7}\pi$$

<晨晖家教试题科 供题>

2. 证明：任意四个正数中一定可选出 2 个数 x 和 y ，使下式成立：

$$0 \leq \frac{x-y}{1+x+y+2xy} < 2-\sqrt{3}$$

<晨晖家教试题科 供题>

3. 设正系数的二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根，并记 $\max(a,b,c)$ 为 a,b,c 三个数中最大的数，记 $\min(a,b,c)$ 为 a, b, c 三个数中最小的数。求证：

(1). $\max(a,b,c) \geq \frac{4}{9}(a+b+c)$

(2). $\min(a,b,c) \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$

<晨晖家教试题科 供题>

晨晖家教中学数学竞赛

CMC2004 年 3 月赛题 (总第 4 期)

2004 年全国高中数学联合竞赛热身赛

(2004 年 3 月 10 日前绝密)

注意：本期赛题共三道大题。答题时间：2004. 3. 10-2004. 3. 31。试题提交截止日期为 2004. 3. 31。下期赛题出题时间为 2004. 4. 10。参赛对象为成都市所有数学爱好者。本月第一位全部答对者获晨晖家教提供的奖金 50 元。

CMC 官方网站：<http://www.chenhui.org>

1. 求证：对一切自然数 m, n ($n \geq m+1$), 成立：

$$\frac{n}{C_n^m} + \frac{n}{C_n^{m+1}} = \frac{n+1}{C_{n-1}^m}$$

<晨晖家教试题科 供题>

2. 对每一对实数 (x, y) , 函数 $f(t)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 1$, 若 $f(-2) = -2$, 试在整数范

围内解方程： $f(x) = x$

3. 已知 $a, b, c > 0, abc = 1$, 求证对一切 $n \in N$ 成立：

$$\frac{1}{a^{2n+1}(b+c)} + \frac{1}{b^{2n+1}(a+c)} + \frac{1}{c^{2n+1}(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

<晨晖家教试题科 供题>

晨晖家教中学数学竞赛

CMC2004 年 5 月赛题 (总第 5 期)

2004 年全国高中数学联合竞赛热身赛

(2004 年 5 月 10 日前绝密)

注意：本期赛题共三道大题。答题时间：2004.5.10-2004.5.31。试题提交截止日期为 2004.5.31。下期赛题出题时间为 2004.6.10。参赛对象为成都市所有数学爱好者。本月第一位全部答对者获晨晖家教提供的奖金 50 元。

CMC 官方网站：<http://www.chenhui.org>

1. 求值：

$$\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13}$$

<晨晖家教试题科供题>

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=40^\circ$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ，D、E 分别在边 AC、AB 上，且使得 $\angle CBD=40^\circ$ ， $\angle BCE=70^\circ$ ，F 为 BD、CE 的交点，求证 $AF \perp BC$ 。

<晨晖家教试题科供题>

3. 设 $x, y, z > 0$ 且满足 $x + y + z = 1$ ，求证：

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{x+z}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

<晨晖家教试题科供题>

晨晖家教中学数学竞赛

CMC2004 年 6 月赛题 (总第 6 期)

2004 年全国高中数学联合竞赛热身赛

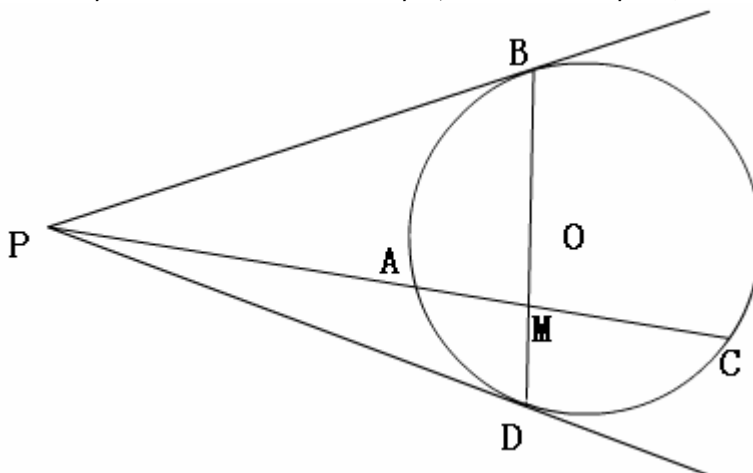
(2004 年 6 月 12 日前绝密)

注意：本期赛题共两道大题。答题时间：2004. 6. 12-2004. 6. 30。试题提交截止日期为 2004. 6. 30。下期赛题出题时间为 2004. 7. 10。参赛对象为成都市所有数学爱好者。本月第一位全部答对者获晨晖家教提供的奖金 50 元。

CMC 官方网站：<http://www.chenhui.org>

2. 已知 PB、PD 分别切 $\odot O$ 于 B、D 两点，PAC 是 $\odot O$ 的一条割线，A、C 在 $\odot O$ 上，AC 交 BD 于 M。

求证：
$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PC} = \frac{2}{PM}$$



<晨晖家教试题科供题>

2. 证明 $\tan 20^\circ$ 是方程 $x^4 - 4\sqrt{3}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{3}x - 3 = 0$ 的根。

<晨晖家教试题科供题>